Ω-spectrum and cohomology theory

秋桜

Outline

Outline

Notation

単位閉区間 [0,1] を I と表す.

基点付き位相空間 $(X, x), (Y, y)$ の基点を保つ連続写像のホモトピー類の集合を $\langle X, Y \rangle$ と表す.

群 G と自然数 n に対し, (G, n) 型 Eilenberg-MacLane 空間を $K(G, n)$ と表す.

$O = \varinjlim O(n)$ と表し, $U = \varinjlim U(n)$ と表す.

Notation

集合と写像のなす圏を **Set** と表す.

基点付き位相空間と基点を保つ連続写像のなす圏を $\mathbf{Top}_*$ と表す.

基点付き CW 複体のなす $\mathbf{Top}_*$ の充満部分圏を $\mathbf{CW}_*$ と表す.

アーベル群と群準同型写像のなす圏を **Ab** と表す.

Top の間の錐をとる関手を $C\colon \mathbf{Top}\to\mathbf{Top}$ と表す.

Top の間の懸垂をとる関手を $S\colon \mathbf{Top}\to\mathbf{Top}$ と表す.

Homotopy Theory

ホモトピーとは, 位相空間や連続写像を連続的に変形するということを定式化した概念であり, 位相空間や連続写像から代数的な対象と準同型写像を与える.

ホモトピー論とは, 1930 年代に Poincare や Hopf などの手により発展しはじめたホモトピーを用いて, 位相空間や連続写像を研究する理論である.

Category Theory

圏と関手は, 数学的対象とその間の関係を抽象的に扱える概念であり, 圏と関手は様々な応用先があるため, 現代数学では欠かせないものになっている.

圏論とは, 1940 年代に Eilenberg や MacLane がホモロジーやコホモロジーを定式化するために発展しはじめた圏と関手の理論である.

CW complex

CW 複体は胞体を貼り合わせて得られる空間であり, 議論しやすく, 圏論的に優れた性質をもつ.

CW 複体は 1940 年代にホモトピー論の研究の中で Whitehead により定義され, 現代数学でも重要な空間である.

Outline

Reduced Cohomology Theory

Definition 1.1 (簡約コホモロジー論)

$\mathbf{CW}_*$ 上の簡約コホモロジー論とは, 整数 n に対し, 関手 $\tilde{h}^n\colon \mathbf{CW}_*^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ab}$ と CW 対 (X, A) に対し, 自然な双対境界準同型写像 $\delta^n\colon \tilde{h}^n(A) \to \tilde{h^{n+1}}(X/A)$ が与えられ, 以下をみたすものである.

(ホモトピー公理) $f \simeq g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{CW}_*^{\mathrm{op}}}((X,x),(Y,y))$ と整数 n に対し, $\tilde{h}^n(f) = \tilde{h}^n(g) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ab}}(\tilde{h}^n(Y), \tilde{h}^n(X))$

(完全列公理) CW 対 (X, A) に対し, 長完全列

$$\dots \xrightarrow{\delta^{n-1}} \tilde{h}^n(X/A) \xrightarrow{\tilde{h}^n(q)} \tilde{h}^n(X) \xrightarrow{\tilde{h}^n(i)} \tilde{h}^n(A) \xrightarrow{\delta^n} \tilde{h^{n+1}}(X/A) \xrightarrow{\tilde{h^{n+1}}(i)} \dots$$

が存在する.

(ウェッジ和公理) 包含写像 $i_\alpha\colon X_\alpha \hookrightarrow \bigvee_\alpha X_\alpha$ は整数 n に対し, 同型

$$\prod_\alpha \tilde{h}^n(i_\alpha)\colon \tilde{h}^n\left(\bigvee_\alpha X_\alpha\right) \xrightarrow{\cong} \prod_\alpha \tilde{h}^n(X_\alpha)$$ を誘導する.

Reduced Suspension and Loop Space

Top$_*$ の間に重要な随伴関手が存在する.

基点付き位相空間 (X, x) に対し, 基点付き位相空間 $(SX/(\{x\} \times I), [x])$ を対応させ, 基点を保つ連続写像 f に対し, $S(f)$ の商写像を対応させることにより, 関手 $\Sigma\colon$ **Top**$_*$ →**Top**$_*$ を得る.

基点付き位相空間 (X, x) に対し, ループ空間を対応させ, 基点を保つ連続写像 f に対し,

$$\begin{array}{cccccc} \Omega(f) & : & (\Omega X, c_x) & \longrightarrow & (\Omega Y, c_y) \\ & & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & & [m] & \longmapsto & [f \circ m] \end{array}$$

対応させることにより, 関手 $\Omega\colon$ **Top**$_*$ →**Top**$_*$ を得る.

Adjoint Functor

これらの関手は以下のように随伴関手となる.

Theorem 1.2

$$
\begin{tikzcd}
\mathsf{Top}_* \arrow[r, shift left=2ex, "\Sigma"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{Top}_* \arrow[l, shift left=2ex, "\Omega"]
\end{tikzcd}
$$

Loop Space and Homotopy Group

位相空間 K と自然数 n に対し,

$$\pi_{n+1}(K) = \langle S^{n+1}, K \rangle = \langle SS^n, K \rangle = \langle \Sigma S^n, K \rangle = \langle S^n, \Omega K \rangle = \pi_n(\Omega K)$$

となる. つまり, ループ空間を考えることでホモトピー群の次元を下げることができる. 特に, $\Omega K(G, n)$ は $K(G, n-1)$ である.

Observation of Reduced Cohomology Theory

$\mathbf{CW}_*$ 上の簡約コホモロジー論はまず, 基点付き CW 複体に対し, アーベル群の列を定めたいのであった.

基点付き CW 複体 $(X, x), (K, k)$ に対し, $\langle X, \Omega K \rangle$ はループ積が誘導する演算により, 群となる.

同様に, n-重ループ空間 $\Omega^n X$ を考えることで, アーベル群 $\langle X, \Omega^n K \rangle$ を得る.

I は局所コンパクトハウスドルフ空間なので, $K^{I \times I} \cong (K^I)^I$ が成立する. よって, $\Omega^n K$ は連続写像 $I^n \to K$ で ∂I^n を基点に移すものの空間とみなせる.

Observation of Reduced Cohomology Theory

Proposition 2.1

基点付き位相空間 $(X,x),(K,k),(M,m)$ に対し, 弱ホモトピー同値 $K \to \Omega M$ が存在すれば, $\langle X,K\rangle = \langle X,\Omega M\rangle$ となる.

上の命題により, K はループ空間でなくてもループ空間と弱ホモトピー同値で十分であることがわかる.

Observation of Reduced Cohomology Theory

簡約コホモロジー論の完全列公理より, CW 対 (CX, X) に対し, 長完全列

$$\cdots \xrightarrow{\delta^{n-1}} \tilde{h}^n(CX/X) \xrightarrow{\tilde{h}^n(q)} \tilde{h}^n(CX) \xrightarrow{\tilde{h}^n(i)} \tilde{h}^n(X) \xrightarrow{\delta^n} \tilde{h}^{n+1}(CX/X) \xrightarrow{\tilde{h}^{n+1}(q)} \cdots$$

つまり,

$$\cdots \xrightarrow{\delta^{n-1}} \tilde{h}^n(\Sigma X) \xrightarrow{\tilde{h}^n(q)} \tilde{h}^n(X) \xrightarrow{\tilde{h}^n(i)} \tilde{h}^n(X) \xrightarrow{\delta^n} \tilde{h}^{n+1}(\Sigma X) \xrightarrow{\tilde{h}^{n+1}(q)} \cdots$$

を得る.
したがって, 自然同型 $\tilde{h}^n(X) \cong \tilde{h}^{n+1}(\Sigma X)$ が成立するが, $\tilde{h}^n(X) = \langle X, K_n \rangle$ とすると, この同型はループ空間への弱ホモトピー同値から誘導される.

Definition of Ω-spectrum

これらの観察により, Ω-spectrum を以下のように定義するのが妥当である.

Definition 2.2 (Ω-spectrum)

各整数 n に対し, 弱ホモトピー同値 $K_n \to \Omega K_{n+1}$ が存在する CW 複体の列 $(K_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ を Ω-spectrum という.

Example of Ω-spectrum

Example 2.3 (Eilenberg-MacLane spectrum)

CW 複体である Eilenberg-MacLane 空間の列 $(K(G,n))_{n\in\mathbb{Z}}$ は Ω-spectrum である.

Bott 周期性定理より, 弱ホモトピー同値 $O \to \Omega^8 O$ や $U \to \Omega^2 U$ が存在するため, O や U は周期的な Ω-spectrum を与える. これは K 理論で重要である.

Outline

Ω-spectrum define Reduced Cohomology Theory

任意の Ω-spectrum は簡約コホモロジー論を定める.

Theorem 3.1

任意の Ω-spectrum $(K_n)_{n\in Z}$ は各 n に対し, 関手 $\tilde{h}^n(X) = \langle X, K_n \rangle$ とすることで $\mathbf{CW}_*$ 上の簡約コホモロジー論を定める.

Sketch of Proof

ホモトピー公理と完全列公理とウェッジ和公理をみたすことを確かめる.

基点を保つ連続写像 $f\colon (X,x) \to (Y,y)$ は各 n に対し, 準同型写像

$$
\begin{array}{ccccc}
\tilde{h}^n(f) & : & \langle Y, K_n\rangle = \langle Y, \Omega K_{n+1}\rangle & \longrightarrow & \langle X, K_n\rangle = \langle X, \Omega K_{n+1}\rangle \\
 & & \uplus & & \uplus \\
 & & [m] & \longmapsto & [m \circ f]
\end{array}
$$

を誘導し, $f \simeq g$ ならば $\tilde{h}^n(f) = \tilde{h}^n(g)$ となるため, ホモトピー公理をみたす.

Sketch of Proof

CW 対 (X, A) に対し, Puppe sequence

$$A \longrightarrow X \longrightarrow X/A \longrightarrow \Sigma A \longrightarrow \Sigma X \longrightarrow \Sigma(X/A) \longrightarrow \dots$$

と Proposition 2.1 より, 完全列

$$\begin{array}{ccccccccccc} \dots & \longrightarrow & \langle X/A, K_n \rangle & \longrightarrow & \langle X, K_n \rangle & \longrightarrow & \langle A, K_n \rangle & \longrightarrow & \langle X/A, K_{n+1} \rangle & \longrightarrow & \dots \\ & & \Vert & & \Vert & & \Vert & & \Vert & & \\ \dots & \longrightarrow & \tilde{h}^n(X/A) & \longrightarrow & \tilde{h}^n(X) & \longrightarrow & \tilde{h}^n(A) & \longrightarrow & h^{\tilde{n}+1}(X/A) & \longrightarrow & \dots \end{array}$$

を得るため, 完全列公理をみたす.

Sketch of Proof

包含写像 $i_\alpha\colon X_\alpha \hookrightarrow \bigvee_\alpha X_\alpha$ は整数 n に対し, 同型写像

$$\begin{array}{ccccc} \prod_\alpha \tilde{h}^n(i_\alpha) & : & \left\langle \bigvee_\alpha X_\alpha, K_n \right\rangle = \left\langle \bigvee_\alpha X_\alpha, \Omega K_{n+1} \right\rangle & \longrightarrow & \prod_\alpha \langle X_\alpha, K_n\rangle = \prod_\alpha \langle X_\alpha, \Omega K_{n+1}\rangle \\ & & \Cup & & \Cup \\ & & [m] & \longmapsto & \prod_\alpha [m|_{X_\alpha} \circ i_\alpha] \end{array}$$

を誘導するため, $\prod_\alpha \tilde{h}^n(i_\alpha)\colon \tilde{h}^n\left(\bigvee_\alpha X_\alpha\right) \xrightarrow{\cong} \prod_\alpha \tilde{h}^n(X_\alpha)$ を得る. よってウェッジ和公理をみたす.

Homotopy Construction of Cohomology

Theorem 3.2

$\mathbf{CW}_*$ 上の簡約コホモロジー論 $\tilde{h}$ が $n \neq 0$ に対し, $\tilde{h}^n(*) = 0$ をみたすとき, 任意の CW 複体 X と任意の n に対し, 自然同型 $\tilde{h}^n(X) \cong \tilde{H}^n(X; \tilde{h}^0(*))$ が成立する.

Eilenberg-MacLane spectrum を考えると以下が得られる.

Corollary 3.3

任意の CW 複体 X と任意の $n > 0$ と任意のアーベル群 G に対し, 自然同型 $\langle X, K(G, n)\rangle \cong \tilde{H}^n(X; G)$ が成立する.

Brown Representability Theorem

任意の Ω-spectrum は簡約コホモロジー論を定めたが, 驚くべきことに逆も成立する.

Theorem 3.4

任意の $\mathbf{CW}_*$ 上の簡約コホモロジー論はある Ω-spectrum $(K_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ を用いて, $\tilde{h}^n(X) = \langle X, K_n \rangle$ と表現できる.

Brown Functor

Definition 3.5 (Brown 関手)

関手 $F\colon \mathbf{CW}_*^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}$ が以下をみたすとき, Brown 関手という.

- $f \simeq g \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{CW}_*^{\mathrm{op}}}((X,x),(Y,y))$ に対し,
  $F(f) = F(g) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{Set}}(F(Y), F(X))$
- 包含写像 $i_\alpha\colon X_\alpha \hookrightarrow X$ は整数 n に対し, 同型
  $\prod_\alpha F(i_\alpha)\colon F\left(\bigvee_\alpha X_\alpha\right) \cong \prod_\alpha F(X_\alpha)$ を誘導する.
- A, B を X の部分複体とし, 次の図式を考える.

$$
\begin{tikzcd}
F(A \cap B) & F(A) \arrow[l, "F(j_A)"'] \\
F(B) \arrow[u, "F(j_B)"] & F(X) \arrow[l, "F(i_B)"] \arrow[u, "F(i_A)"']
\end{tikzcd}
$$

このとき, $a \in F(A)$, $b \in F(B)$ で $F(j_A)(a) = F(j_B)(b)$ となるならば, $x \in F(X)$ で $F(i_A)(x) = a$ かつ $F(i_B)(x) = b$ となるものが存在する.

Brown Representability Theorem

Theorem 3.6

Brown 関手は表現可能であり, CW 複体である分類空間が存在し, 分類空間は弱ホモトピー同値を除いて一意である.

簡約コホモロジー群をとる関手は Brown 関手であり, 分類空間は Eilenberg-MacLane 空間である.

Spectrum and Brown Representability Theorem

Spectrum は元々は幾何学的な構成に基いた概念だったが, そのホモトピー圏が三角圏をなすことからも分かるように, ホモロジー代数を一般化する枠組みとしても用いることができるようになった.

[Neeman] では三角圏での Brown Representability Theorem を考えている.

現代では安定モデル圏という枠組みも存在する.

Outline

Reference

[Hatcher] Allen Hatcher(著)・「Algebraic Topology」・Cambridge University Press・2001

[荒木] 荒木 捷朗 (著)・「一般コホモロジー」・紀伊國屋書店・1975

[河野, 玉木] 河野 明 (著), 玉木 大 (著)・「一般コホモロジー」・岩波書店・2008

[西田] 西田 吾郎 (著)・「ホモトピー論」・共立出版・1985

[Neeman] Amnon Neeman (著)・「Triangulated Categories」・Princeton University Press・2014